TD6 Fonction holo

On a :

$$|H_R^1| \leq \int_0^\pi \frac{R^2-a^2}{R^2-a^2} e^{-R\sin(\theta)} d\theta \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$ (cf exo avant...)

$$H_R^3 = -i \int_0^\pi \frac{e^{2i\theta} - R^2a^2}{e^{2i\theta} + R^2a^2} e^{i\frac{e^{i\theta}}{R}} d\theta$$

On a :
$$\frac{e^{2i\theta} - R^2a^2}{e^{2i\theta}+R^2a^2} = \frac{\frac{1}{R^2a^2} e^{2i\theta} - 1}{\frac{e^{2i\theta}}{R^2a^2}+1} = \left(\frac{1}{R^2a^2}e^{2i\theta} - 1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{2i\theta}}{R^2a^2}\right)^n$$

$$e^{i\frac{e^{i\theta}}{R}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ie^{i\theta}}{R}\right)^n$$

D'où : $$H_R^3 = -i\int_0^\pi \left(\frac{1}{R^2a^2}e^{2i\theta} - 1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{2i\theta}}{R^2a^2}\right)^n \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ie^{i\theta}}{R}\right)^n d\theta$$

$$= -i\int_0^\pi \left(\frac{1}{R^2a^2}e^{2i\theta} - 1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2in\theta}}{R^{2n}a^{2n}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\frac{1}{R^n}e^{in\theta}$$

le produit de Cauchy nous donne donc :

$$H_R^3 = -i\int_0^\pi\left(\frac{e^{2i\theta}}{R^2a^2} - 1\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2i\theta n} d\theta$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(i)^{2k}}{n!}\frac{1}{R^{2k}}\frac{1}{(R^2a^2)^{n-k}}$$

$$H_R^3 = \underbrace{-i\int_0^\pi \frac{1}{R^2a^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2i\theta(n+1)} d\theta}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0} + i\int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2i\theta n} d\theta$$

$$\simeq i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2in}\left[e^{2i\theta(n+1)}\right]_0^\pi \simeq i\pi$$

Par le théorème des résidus :

$$J_a^R = \int_{\gamma_R} \frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}\frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, ia)$$